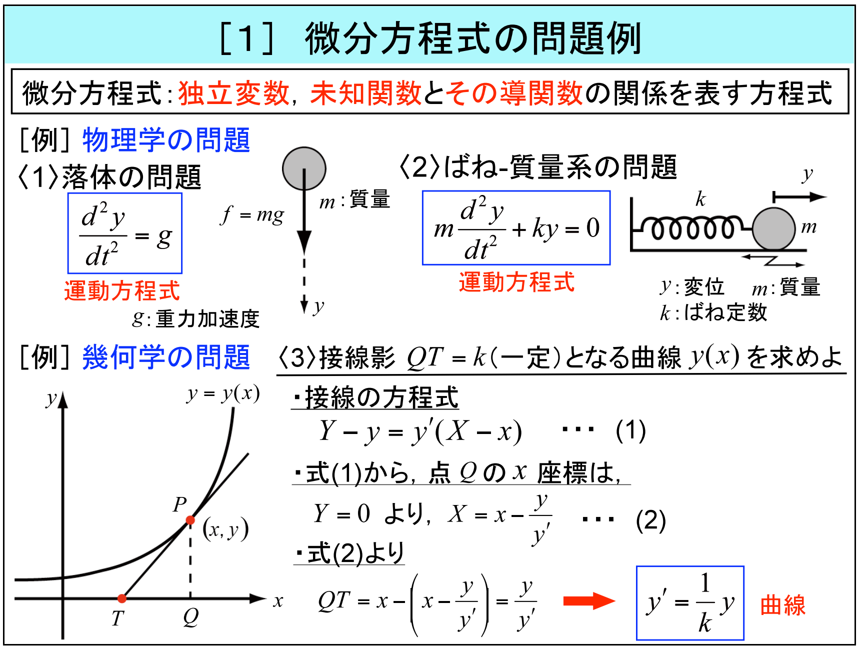
1. 微分方程式の問題例



1. 今日は微分方程式を勉強します．
2. 微分方程式は独立変数，未知関数とその導関数の関係を表す方程式です．
3. ここでは，微分方程式の詳しい説明に入る前に，微分方程式の問題例を紹介します．
4. 最初は，物理学の問題です．
5. 〈1〉は，質量 m の物体が落下する問題です．
6. この問題の運動方程式は加速度 a を用いて，$ma=mg$ になります．
7. この式は位置 y と時間 t を用いると，$\frac{d^2y}{dt^2}=g$ になります．
8. これは，独立変数 t，未知関数 y，導関数 $\frac{d^2y}{dt^2}$ の関係を表す方程式なので，微分方程式です．

1. Today, we study differential equations.
2. Differential equations are equations which give the relationship between independent variables, unknown functions and their derivatives.
3. Before explaining differential equations in detail, I will introduce some examples.
4. First one is a problem from physics.
5. 〈1〉 is a problem of a falling body of mass m.
6. The equation of motion is given by $ma=mg$ where a is the acceleration.
7. This equation is expressed as $\frac{d^2y}{dt^2}=g$ using position y and time t.
8. Since this equation expresses the relationship between an independent variable t, the unknown function y

and it's derivative $\frac{d^2y}{dt^2}$, it belongs to the differential equation.

9. また,〈2〉はばねの片方が固定され, もう片方に質量 m の物体が付いたばね-質量系の問題です.

9. 〈2〉is a problem of a spring-mass system where one end of the spring is fixed and the other end is connected to a mass.

10. 〈1〉と同様に, 変位 y に対して運動方程式を求めると, $m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0$ になります.

10. Similar to〈1〉, the equation of motion for the displacement y is given by $m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0$.

11. この方程式も, 微分方程式です.

11. This equation is also a differential equation.

12. ここまでは, 物理学の問題でしたが, 次は, 幾何学の問題を紹介します.

12. These examples are problems in physics. Next, I will introduce a problem in geometry.

13. 〈3〉は, 接線影の問題です.

13. 〈3〉is a problem of a subtangent.

14. この問題は, x の関数である y に対して, ある点P の接線を考え, 接線影の長さ QT が k で一定となるときの曲線 y の方程式を求めることです.

14. This is the problem to obtain the equation which has the following characteristic: Draw the tangent to the curve at P and let T be the point where this line intersects the x-axis. Let Q be the foot of the normal on the x-axis from P. The length of subtangent $QT=k$ is constant for this curve.

15. まず, 点P(x,y)での接線を求めると, 式(1)になります.

15. At first, we derive the expression for the tangent at point P (x,y) and obtain Eq.(1).

16. 式(1)から, 点 T の x 座標は, $Y=0$ を代入すると, $X=x-\frac{y}{y'}$ になります.

16. Substituting $Y=0$ into Eq.(1), we obtain the x-coordinate of point T as $X=x-\frac{y}{y'}$.

17. 式(2)より, 接線影の長さは点 Q と点 T の x 座標の差から求められ, $QT=\frac{y}{y'}$ になります.

17. The length of subtangent is obtained as the difference in the x-coordinates of P and T. From Eq.(2), we have $QT=\frac{y}{y'}$.

18. そのため, 求める方程式は, $y'=\frac{1}{k}y$ で, 曲線を表す微分方程式になります.

18. Therefore, the equation of the curve is

given by $y' = \dfrac{1}{k}y$, and this is a differential equation for this curve.

キーワード

・微分方程式，・独立変数，・未知関数，・導関数，・微分，・運動方程式，・関数，・座標

日本語解説

文 1 「今日は」

「今日」は today です。昨日は yesterday、明日は tomorrow です。

今回の授業で勉強する内容を説明する表現で、「今日から」と同様に講義の最初によく出てくる表現です。

☞「講義に役立つ日本語」

文 5 「質量 m 」

文 6 「加速度 a 」

文 7 「位置 y 」「時間 t 」

アルファベットは英語の発音を日本語の発音に置き換えたもので読みます。 m はエムと読みます。この時、“エン” と間違いやすいので注意が必要です。英語で語末に “m / me” がつく言葉は “ム” と発音することが多いです。

（例）	dream	ドリーム
	ham	ハム
	ice cream	アイスクリーム
	dome	ドーム
	time	タイム

同様に、「 a 」はエー、「 y 」はワイ、「 t 」はティーと読みます。

英語の発音を日本語で置き換えた言葉は、カタカナで書きます。このような言葉のことをカタカナ語と言います。

数学や物理ではアルファベットの記号がたくさん出てきます。下の表はアルファベットの読み方です。読み方が 2 つ以上あるものもあります。

アルファベットの読み方

a	エー　エイ	j	ジェー　ジェイ	s	エス
b	ビー	k	ケー　ケイ	t	ティー
c	シー	l	エル*	u	ユー
d	ディー	m	エム*	v	ブイ*　ヴィー
e	イー	n	エヌ*　エン	w	ダブリュ　ダブル*
f	エフ	o	オー	x	エックス*
g	ジー	p	ピー	y	ワイ
h	エイチ　エッチ*	q	キュー	z	ゼット*　ズィー
i	アイ	r	アール*		

一部、英語の発音と大きく異なるもの、促音（小さい「ッ」）が入るもの（表中の*印）が間違いやすいので注意が必要です。

文８「これは」

「これ」（this）は近くのものを示す指示代名詞（demonstrative pronoun）です。物理的に自分の近くのものを示す時にも使いますが、すぐ前の文章で出てきた内容を示す時もあります。

文６「この問題」
文７「この式」

示している内容を表す名詞（noun）に付くときは「この」を使います。「この問題」は this problem、「この式」は this equation という意味です。

文１２「ここまで」

場所や時間などの地点（point of place / time）を示すときは「ここ」を使います。英語では here という意味です。この場合は時間的な地点を示しています。

似た表現に“こちら”があります。これは物理的な地点や領域（area）を示す時に使います。

指示代名詞には、他に、自分より遠くのものを示す“あれ”、自分と話している人のそばのものや少し前の文章に出てきた内容を示す“それ”、疑問詞（question word）の“どれ”を合わせた4種類があります。

これ	この	ここ	こちら
あれ	あの	あそこ	あちら
それ	その	そこ	そちら
どれ	どの	どこ	どちら

文１４「長さ*QT*」

「長さ」は length という意味の名詞（noun）です。「長い」は long という意味の形容詞（adjective）です。形容詞に“さ”を付けると程度を表す名詞になります。

（例）

長い	long	→	長さ	length
高い	high	→	高さ	height
大きい	big, large	→	大きさ	size
便利な	convenient	→	便利さ	convenience
安全な	safe	→	安全さ	safety
きれいな	clean	→	きれいさ	cleanness

2. 微分方程式について

［2］ 微分方程式について

＜名称について＞

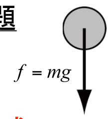
- ・独立変数が1個 → 常微分方程式 → ここでは，これ以降，「微分方程式」と呼ぶ
- ・独立変数が2個以上 → 偏微分方程式

・導関数の最高階 → 微分方程式の階数

・未知関数とその導関数が1次式 → 線形

［例］〈1〉落体の問題

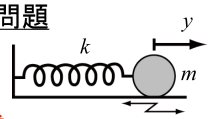
$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}=g}$$



2階線形微分方程式

〈2〉ばね-質量系の問題

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0}$$



2階線形微分方程式

〈3〉接線影の問題

$$\boxed{y'=\frac{1}{k}y}$$

1階線形微分方程式

次は，解き方の説明

	日本語		English
1.	次は，微分方程式の名称について説明します．	1.	Next, I will explain terminologies related to differential equations.
2.	微分方程式は，独立変数の個数により 2種類に分けられます．	2.	Differential equations are classified into two types depending on the number of independent variables.
3.	独立変数が 1個のとき，常微分方程式と呼び，2個以上のとき，偏微分方程式と呼びます．	3.	When the number is one, the equation is called an ordinary differential equation. When it is more than two, it is called a partial differential equation.
4.	ここでは常微分方程式の説明のみしますので，これ以降は，常微分方程式を簡単に微分方程式と呼びます．	4.	Here, I will explain only ordinary differential equations. So, we simply call ordinary differential equations as differential equations.
5.	また，微分方程式の導関数の最高階がその方程式の階数となり，さらに，未知関数とその導関数が 1次式のとき，線形であると呼びます．	5.	The order of a differential equation corresponds to the index of the highest derivative in a differential equation. If the unknown function and its derivatives are the first order, it is called linear.
6.	そのため，前の例である〈1〉落体の問題の微	6.	In the former example〈1〉, the differential

分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}=g$ は，2階線形微分方程式と呼び，同様に〈2〉ばね-質量系の問題の微分方程式 $m\dfrac{d^2y}{dt^2}+ky=0$ も，2階線形微分方程式と呼びます.

equation $\dfrac{d^2y}{dt^2}=g$ for a falling body is called the 2nd order linear ordinary differential equation. In example〈2〉, the differential equation $m\dfrac{d^2y}{dt^2}+ky=0$ for a spring-mass system is also called the 2nd order linear ordinary differential equation.

7. また，〈3〉接線影の問題の微分方程式 $y'=\dfrac{1}{k}y$ は, 1階線形微分方程式と呼びます.

7. The differential equeation $y'=\dfrac{1}{k}y$ for a subtangent problem in〈3〉is called the 1st order linear ordinary differential equation.

8. 次からは, これらの微分方程式の解き方について説明します.

8. Next, I will explain how to solve these differential questions.

キーワード

・常微分方程式, ・偏微分方程式, ・階数, ・1次式, ・線形, ・1階線形常微分方程式

日本語解説

文２「2種類」
文３「1個」
文５「1次式」
文６「2階線形微分方程式」

ものを数えるときの表現で、数字の後ろに数えるものが付きます。「種類」は kind、「個」はもの（object)、「次」は回数や順番、「階」は floor や層（layer）を数えるときに使います。その時、後ろにつく言葉によって、数字の読み方が一部変わるもの（下の表の*印）がありますので注意が必要です。また、「種類」と「個」と「階」の数え方は似ていますが、少し違うものもある（下の表の**印）ので注意が必要です。「階」の場合、“3 階”は“さんかい”または“さんがい”と読むことがあります（下の表の***印）。

数字の読み方とものの数え方

1	いち	1 種類	いっしゅるい*
2	に	2 種類	にしゅるい

3	さん	3 種類	さんしゅるい
4	し　よん	4 種類	よんしゅるい
5	ご	5 種類	ごしゅるい
6	ろく	6 種類	ろっしゅるい*　ろくしゅるい**
7	しち　なな	7 種類	ななしゅるい
8	はち	8 種類	はっしゅるい*　はちしゅるい
9	きゅう	9 種類	きゅうしゅるい
10	じゅう	10 種類	じゅっしゅるい*
11	じゅういち	11 種類	じゅういっしゅるい*
12	じゅうに	12 種類	じゅうにしゅるい
	・・・		・・・
20	にじゅう	20 種類	にじゅっしゅるい*　にじっしゅるい*
100	ひゃく	100 種類	ひゃくしゅるい**　ひゃっしゅるい*
101	ひゃくいち	101 種類	ひゃくいっしゅるい*
	・・・		・・・

1	いち	1 次	いちじ	1 個	いっこ*
2	に	2 次	にじ	2 個	にこ
3	さん	3 次	さんじ	3 個	さんこ
4	し　よん	4 次	よじ*	4 個	よんこ
5	ご	5 次	ごじ	5 個	ごこ
6	ろく	6 次	ろくじ	6 個	ろっこ*
7	しち　なな	7 次	しちじ　ななじ	7 個	ななこ
8	はち	8 次	はちじ	8 個	はっこ*　はちこ
9	きゅう	9 次	くじ*　きゅうじ	9 個	きゅうこ
10	じゅう	10 次	じゅうじ	10 個	じゅっこ*
11	じゅういち	11 次	じゅういちじ	11 個	じゅういっこ*
12	じゅうに	12 次	じゅうにじ	12 個	じゅうにこ
	・・・		・・・		・・・
20	にじゅう	20 次	にじゅうじ	20 個	にじゅっこ*
100	ひゃく	100 次	ひゃくじ	100 個	ひゃっこ*
101	ひゃくいち	101 次	ひゃくいちじ	101 個	ひゃくいっこ*
	・・・		・・・		・・・

1	いち	1 階	いっかい*
2	に	2 階	にかい
3	さん	3 階	さんかい　さんがい***
4	し　よん	4 階	よんかい*
5	ご	5 階	ごかい
6	ろく	6 階	ろっかい*
7	しち　なな	7 階	ななかい
8	はち	8 階	はちかい　はっかい*
9	きゅう	9 階	きゅうかい
10	じゅう	10 階	じゅっかい*
11	じゅういち	11 階	じゅういちかい　じゅういっかい*
12	じゅうに	12 階	じゅうにかい
	・・・		・・・
20	にじゅう	20 階	にじゅっかい*
100	ひゃく	100 階	ひゃっかい*
101	ひゃくいち	101 階	ひゃくいちかい　ひゃくいっかい*
	・・・		・・・

文８「解き方」

動詞（verb）に「～方」を付けるとその方法を表す the way of ～という意味になります。またその時、動詞の“～ます”の形から“ます”を取った形（base form／マス形）を使います。

（例）解く　解きます　to solve　→　解き方
　　　話す　話します　to speak　→　話し方
　　　読む　読みます　to read　→　読み方
　　　書く　書きます　to write　→　書き方

3. 変数分離形の問題例とその解き方

［3］ 変数分離形の問題例とその解き方

変数分離形の微分方程式

$$\boxed{y' = f(x)g(y)}$$

左辺：x に対する y の1階の導関数
右辺：$\underline{x\text{の関数}}$と$\underline{y\text{の関数}}$の積

［例］ 微分方程式 $y' = -\dfrac{4x}{9y}$ ・・・ (3) を解け.

・式(3)より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y} \quad \rightarrow \quad \underbrace{9y\,dy}_{y\text{の関数}} = \underbrace{-4x\,dx}_{x\text{の関数}} \quad \cdots \ (4)$$

・式(4)の両辺を積分すると,

$$\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + C_1 \quad (C_1 : \text{積分定数}) \quad \cdots \ (5)$$

・式(5)を整理し,
積分定数をおき直すと,

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = C} \quad \cdots \ (6)$$

$\left(C = \dfrac{C_1}{18}\right)$ 楕円を表す方程式

1. まず, 変数分離形の微分方程式について説明をします.	1. First, I will explain separable differential equations.
2. 変数分離形の微分方程式は $y' = f(x)g(y)$ の形で表されます.	2. A separable differential equation can be written in the form $y' = f(x)g(y)$.
3. 左辺は x に対する y の 1階の導関数であり, 右辺は x の関数と y の関数の積です.	3. The left-hand side is the 1st order derivative of y and the right-hand side is the product of a function of x and a function of y.
4. この微分方程式の解き方を, 問題例を用いて説明します.	4. I will explain how to solve this type of differential equations using an example.
5. 例として, 微分方程式 $y' = -\dfrac{4x}{9y}$ を解きます.	5. As an example, we solve $y' = -\dfrac{4x}{9y}$.
6. ここで, 式(3)の y' は $\dfrac{dy}{dx}$ に変えます.	6. Here, y' in Eq.(3) is written as $\dfrac{dy}{dx}$.
7. この式を変形すると, 式(4)のように左辺は y の関数, 右辺は x の関数になります.	7. This equation is transformed into Eq.(4) where the left-hand side in a function of only y and the right-hand side is a function of only x.
8. このとき, 両辺を積分すると, 式(5)が得られます.	8. Integrating both sides, we have Eq.(5).

9.	ここで，式(5)の C_1 は積分定数です．	9.	Where C_1 in Eq.(5) is an arbitrary constant called the constant of integration.
10.	さらに，式(5)を整理し，積分定数を C におき直すと，式(6)になります．	10.	Furthermore, rearranging Eq.(5), we have Eq.(6) where the new constant of integration C is used.
11.	式(6)は楕円を表す方程式であることがわかります．	11.	We see that Eq.(6) is an equation representing an ellipse.
12.	この解き方により, 変数分離形の微分方程式は解けます．	12.	In this way, we can solve a differential equation of a separable type.

キーワード

・変数分離形，・積分，・積分定数，・左辺，・右辺，・両辺，・楕円

日本語解説

文２「$y' = f(x)g(y)$」

「'」は dash を日本語の読み方にしたダッシュと読みます。

「＝」は equal を日本語の読み方にしたイコールと読みます。

「( )」は“かっこ”と読みますが、数式では読まないこともあるようです。

この式は“ワイ ダッシュ イコール エフ （かっこ） エックス ジー （かっこ） エックス”などと読みます。

文７「左辺は y の関数，右辺は x の関数」

「左」は左（left)、「右」は右（right）という意味です。また、「辺」は side, area という意味の漢字です。「左辺」は左の辺、「右辺」は右の辺という意味になります。

２つ以上の漢字を組み合わせた言葉を熟語（compound word）と言います。２つの漢字の組み合わせでは、「左辺」や「右辺」のように、前の漢字が後ろの漢字を説明している熟語があります。

（例）	住所	address	：	住んでいる	to live	→	所 place
	食堂	cafeteria	：	食べる	to eat	→	堂 house
	教室	classroom	：	教える	to teach	→	室 room

文８「両辺」

「両」は both という意味の漢字です。したがって、「両辺」は both side という意味の熟語になります。「両」の付く漢字には他に、“両方”“両側”などがあり、これらは同じ both side という意味です。

4. 同次方程式の解き方

［4］ 同次方程式の解き方

1階線形微分方程式

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

・ $q(x)=0$ のとき，同次方程式

$$y' + p(x)y = 0 \quad \cdots \ (7)$$

＜解き方＞

・式(7)より，

$$y' = -p(x)y \quad \cdots \ (8)$$

変数分離形 ➡ [前述]

・式(8)より，

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \ ➡ \ \underbrace{\frac{dy}{y}}_{y\text{の関数}} = \underbrace{-p(x)dx}_{x\text{の関数}} \quad \cdots \ (9)$$

・式(9)の両辺を積分すると，

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \ ➡ \ \log|y| = -\int p(x)dx + C_1 \quad \cdots \ (10)$$

（ C_1：積分定数）

・式(10)を y について解くと，

$$y = \pm e^{C_1} e^{-\int p(x)dx} \quad \cdots \ (11)$$

・積分定数をおき直す

$$\boxed{y = Ce^{-\int p(x)dx}} \ \left(C = \pm e^{C_1}\right) \cdots \ (12)$$

同次方程式の一般解

1.	次は，同次微分方程式の解き方について説明します．	1.	Next, I will explain how to solve a homogeneous differential equation.
2.	1階線形微分方程式を $y' + p(x)y = q(x)$ と表します．	2.	We express the first order linear differential equation as $y' + p(x)y = q(x)$.
3.	その右辺 $q(x)$ が 0 のとき，式(7)のような微分方程式を同次方程式と呼びます．	3.	When $q(x)$ in the right-hand side is zero, the equation is called a homogeneous equation.
4.	この方程式を解くために，まず，式(7)を式(8)のように変形します．	4.	In order to solve this equation, we transform Eq.(7) into Eq.(8).
5.	式(8)は変数分離形になるので，前述の解き方と同様になります．	5.	Since Eq.(8) is separable, we can apply the method mentioned above.
6.	式(8) の y' を $\dfrac{dy}{dx}$ に変えます．	6.	Term y' in Eq.(8) is replaced by $\dfrac{dy}{dx}$.
7.	また，左辺に y の関数，右辺に x の関数となるように式(9)のように変形します．	7.	This equation is further transformed so that the left-hand side is a function of only y and the right-hand side is a function of only x.
8.	前と同様に，両辺を積分すると，式(10)に	8.	Following the process mentioned above,

なります.

9. ここで，式(10)の C_1 は積分定数です.

10. 式(10)を y について解くと，式(11)になります.

11. さらに，積分定数を $C = \pm e^{C_1}$ におき直すと式(12)になります.

12. これは同次方程式の一般解です.

we integrate both sides and obtain Eq.(10).

9. Term C_1 in Eq.(10) is a constant of integration.

10. Solving Eq.(10) for y, we obtain Eq.(11).

11. If the constant of integration is replaced by $C = \pm e^{C_1}$, Eq.(12) is obtained.

12. This is the general solution of the homogeneous differential equation.

キーワード

・同次方程式，・一般解

日本語解説

文１「同次微分方程式」

文５「同様に」

「同」は同じ (same) という意味の漢字です。この漢字の後ろに言葉が付いて、“同じ～” という意味の熟語になります。

（例）	同次	homogeneous	：	同じ	→	次数	degree
	同数	same number	：	同じ	→	数	number
	同時	same time	：	同じ	→	時間	time
	同様	same manner	：	同じ	→	様式	manner
	同種，同類	same kind	：	同じ	→	種類	kind

文１２「一般解」

「一般」は general という意味です。「解」は solution という意味です。したがって、「一般解」は general solution という意味になります。

3字の熟語の場合では、前の２つの漢字が後ろの漢字を説明するものがあります。

（例）	自転	rotation	＋	車	cycle	＝	自転車	bicycle
	地下	underground	＋	鉄	鉄道（train）	＝	地下鉄	subway
	先進	developed	＋	国	country	＝	先進国	developed country

5. 非同次方程式の解き方

［5］ 非同次方程式の解き方

1階線形微分方程式

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

・ $q(x) \neq 0$ のとき，非同次方程式

$$y' = -p(x)y + q(x) \quad \cdots \quad (13)$$

＜解き方＞

・同次方程式の一般解

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

定数変化法

定数 C を x の関数に変化

・非同次方程式の一般解を仮定

$$\boxed{y = C(x)e^{-\int p(x)dx}} \quad \cdots \quad (14)$$

未知

・式(14)より，

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} \quad \cdots \quad (15)$$

・式(14)，(15)を式(13)に代入

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} \cancel{- p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}} = \cancel{-p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}} + q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \quad \cdots \quad (16)$$

・式(16)の両辺を積分すると，

$$\boxed{C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C} \quad \cdots \quad (17)$$

$C(x)$ が判明

1. 次は，非同次方程式の解き方について説明します．
2. 前の 1階線形微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ の右辺 $q(x)$ が 0 でないとき，式(13)のような微分方程式を非同次方程式と呼びます．
3. この方程式を解くために，同次方程式の一般解の定数 C の部分を関数 $C(x)$ に変えます．
4. この方法を定数変化法と呼びます．
5. そのため，非同次方程式の一般解を変数 $C(x)$ を含む式(14)と仮定します．
6. 式(14)の $C(x)$ は未知なので，これを求める必要があります．
7. 式(14)から y' を求めると式(15)になります．式(14)，(15)を式(13)に代入します．

1. Next, I will explain how to solve a inhomogeneous differential equation
2. Equation (13) is the same as the first order differential equation $y' + p(x)y = q(x)$ mentioned above. When $q(x)$ is not zero, Eq.(13) is called inhomogeneous equation.
3. In order to solve this equation, the constant C in the general solution is replaced by function $C(x)$.
4. This method is called the method of variation of constants.
5. We assume that the general solution of inhomogeneous equation is as Eq.(14) containing function $C(x)$.
6. Since $C(x)$ in Eq.(14) is unknown, which we find as follows.
7. From Eq.(14), we can obtain Eq.(15) for y' . Then Eq.(14) and (15) are

substituted into Eq.(13).

8. このとき，両辺に同じ項が出てくるので，それらを消去すると，式(16)になり，$C'(x)$が求まります．

8. Since same terms exist in both sides, we eliminate them and obtain Eq.(16) which gives $C'(x)$.

9. さらに，式(16)の両辺を積分すると，式(17)になり$C(x)$が求まります．

9. Integrating both sides of Eq.(16), we can obtain Eq.(17) which gives $C(x)$.

10. ここで，式(17)のCは積分定数です．

10. Term C in Eq.(17) is a constant of integration.

11. 式(14)に式(17)を代入すると非同次方程式の一般解になります．

11. Substituting Eq.(17) into Eq.(14), we obtain the general solution of inhomogeneous equation.

12. これで，同次方程式と非同次方程式の両方が解けます．

12. This is how homogeneous and inhomogeneous equations are solved.

キーワード

・非同次方程式，　・定数変化法，　・仮定

日本語解説

文１「非同次方程式」

言葉の前に「非」という漢字がつくと、それを否定する意味の言葉になります。

（例）

○非～：～じゃない

同次	homogeneous	→	非同次	inhomogeneous
常識	common sense	→	非常識	lacking common sense
日常	regular life	→	非日常	irregular life
			非常*	emergency
人間的	humanizing	→	非人間的	dehumanizing

* 例外

このように、他にも、前の漢字１文字が接頭語（prefix）になって、後ろの言葉の意味を変える熟語があります。

（例）

○不～：～じゃない，～しない

連続	continuous	→	不連続	discontinuous

安定	stable	→	不安定	unstable
親切	kind	→	不親切	unkind
必要	necessary	→	不必要	unnecessary
便利	convenient	→	不便*	inconvenient

* 例外：不便利とは言いません。

○無～：～がない

試験	examination	→	無試験	without examination
意味	meaning	→	無意味	meaningless

○未～：まだ～ない

発表	published	→	未発表	unpublished
経験	experienced	→	未経験	inexperienced
発見	discovered	→	未発見	undiscovered

○大～：大きい～

企業	company	→	大企業	big company
都市	city	→	大都市	big city
国	country	→	大国	power country

○超～：とても～

大国	power country	→	超大国	super power country
高圧	high voltage	→	超高圧	ultrahigh voltage

○新～：新しい～

時代	era	→	新時代	new era
製品	product	→	新製品	new product
発見	discovered	→	新発見	newly discovered

文４「この方法を定数変化法」

「方法」は way, method という意味です。この「～法」のように言葉の後に付けると、the method of ～という意味になります。また、「法」には法律（law）という意味もあります。

6. 非同次方程式の問題例

［6］ 非同次方程式の問題例

・非同次方程式

$$y' = -p(x)y + q(x) \cdots (13)$$

非同次方程式の一般解

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdots (14)$$

$$\boxed{C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C} \cdots (17)$$

［例］微分方程式 $y' + 2xy = x \cdots (18)$ を解け.

・式(18)より,

$$p(x) = 2x \,,\quad q(x) = x \cdots (19)$$

・式(19)を式(17)に代入

$$C(x) = \int xe^{\int 2xdx}dx + C = \int xe^{x^2}dx + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \cdots (20)$$

（ C : 積分定数）

・式(20)を式(14)に代入

$$y = \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)e^{-\int 2xdx} = \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)e^{-x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + Ce^{-x^2}}} \cdots (21)$$

	日本語		English
1.	次は，練習のために，前述の非同次方程式の一般解を用いる問題を解きます.	1.	Next, let's practice the technique to solve a problem on an inhomogeneous equation.
2.	上部には先ほどの非同次方程式とその一般解を示します.	2.	In the upper part, above-mentioned inhomogeneous equation and its solution are shown.
3.	問題例は，微分方程式 $y' + 2xy = x$ を解くことです.	3.	The problem is to solve the differential equation $y' + 2xy = x$.
4.	まず，式(18)と式(13)を比較します.	4.	First, Eq.(18) is compared with Eq.(13).
5.	式(18)は式(13)の $p(x) = 2x$， $q(x) = x$ のときと同じです.	5.	We have $p(x) = 2x$ and $q(x) = x$.
6.	そのため，式(19)を式(17)に代入すると， $C(x)$を計算できます.	6.	Therefore, substituting Eq.(19) into Eq.(17), we can obtain $C(x)$.
7.	積分計算を行っていくと， $C(x)$は式(20)になります.	7.	By integrating this, we obtain $C(x)$ shown in Eq.(20).
8.	ここで，式(20)の C は積分定数です.	8.	Term C in Eq.(20) is a constant of integration.
9.	これを式(14)に代入することで方程式の解が得られます.	9.	Substituting this into Eq.(14), we can obtain the solution of the problem.
10.	積分計算を行い，式を整理すると，問題の解である式(21)が求まり，問題が解けたことに	10.	After integration and rearrangement, we can obtain the solution given by Eq.(21).

なります.

日本語解説

文１「前述」

「前」は、以前（above, before）という意味と、正面（front）という２つの意味があります。ここでは以前という意味です。反対の意味の言葉に、後（below, after）と後ろ（back）があります。

「述」は述べる（to describe）という意味で、「前述」は“前に述べた”（described above）という意味になります。この言葉も、前の漢字が後ろの漢字を説明している2字熟語になっています。

文２「上部」

「上」は upper という意味です。反対の意味の漢字に“下”（under）があります。

“上”と“下”を組み合わせた“上下”という熟語があり、上と下の両方あるいはその間（both/between upper and under）を表す言葉になります。

このように、反対の意味の漢字を組み合わせた熟語があります。

（例）上　upper　＋　下　under　→　上下

この置物は上下が反対です。

高　high　＋　低　low　→　高低

この山道は高低差がかなりあります。

男　man　＋　女　woman　→　男女

このクラスは男女一緒に授業を受けます。

大　big　＋　小　small　→　大小

靴のサイズは大小いろいろあります。

左　left　＋　右　right　→　左右

左右をよく見て道を渡りましょう。

また、“中”（middle）という漢字もあります。これと“上”“下”を組み合わせた“上中下”という3字熟語もあります。

「部」は part という意味です。したがって「上部」は upper part, above という意味になります。この言葉も、前の漢字が後ろの漢字を説明している2字熟語になっています。

同様に、“下部”（below part）、“中部”（middle part）という熟語もあります。

7. 解ける微分方程式の形へ帰着

[7] 解ける微分方程式の形へ帰着

・同次形方程式

$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$　　$u = \frac{y}{x}$ 同次形 ・・・ (22) とおく → 変数分離形

・ベルヌーイの方程式

$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^n}$　　$u = y^{1-n}$ ・・・ (23) とおく

→ $\boxed{u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)}$

u についての1階線形微分方程式

・リカッチの方程式

$\boxed{y' = p_0(x)y^2 + p_1(x)y + p_2(x)}$　　$y = \underbrace{y_0}_{\text{解の1つ}} + \frac{1}{u}$ ・・・ (24) とおく

→ $\boxed{u' + (2p_0(x)y_1 + p_1(x))u = -p_0(x)}$

u についての1階線形微分方程式

1. 次は，ここまで解いた微分方程式の形に帰着できる微分方程式を 3 つ紹介します.
2. 1 つ目は同次形方程式です.
3. 同次形方程式は y' と $\frac{y}{x}$ の関数により作られています.
4. この場合，その方程式のままでは解けません.
5. しかし，式(22)のように変数を $u = \frac{y}{x}$ に変更することで，独立変数 x と未知関数 u の変数分離形の微分方程式になり，解くことができます.
6. 2 つ目はベルヌーイの方程式です.
7. ベルヌーイの方程式は 1階線形微分方程式の $q(x)$ に y^n が付いたものです.
8. これも同様に，変数を変更することで解くことができます.

1. Now, I will introduce three differential equations that can be reduced to the form which we have solved.
2. The first is the homogeneous equation.
3. The homogeneous equation is a formed of y' and $\frac{y}{x}$.
4. In this case, this equation can not be solved as it is.
5. However, if we change the variable as in (22) to $u = \frac{y}{x}$, the equation takes the form of separable differential equation in the independent variable x and the unknown function u.
6. Next one is Bernoulli's equation.
7. Bernoulli's equation is obtained by changing $q(x)$ to $q(x)y^n$ in the original first order linear differential equation
8. This can also be solved in the same way by changing variables.

9. 式(23)のように変数を $u = y^{1-n}$ にすることで，方程式を $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$ に変更します.

9. By putting $u = y^{1-n}$ in Eq. (23), the equation can be transformed to $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$.

10. この方程式は未知関数 u についての 1階線形微分方程式になりますので，前述と同様に解くことができます.

10. This equation is the a first order linear differential equation on unknown function u, and can be solved as mentioned above.

11. 3つ目はリカッチの方程式です.

11. The third is the Riccati equation.

12. リカッチの方程式は1階の微分方程式で，y^2 や y に x の関数が付いています.

12. Ruccatu equation is a first order differential equation where function of x is multiplied to y^2 and y.

13. この方程式は解が1つ判明しているとき, 解くことができます.

13. This equation can be solved when one of the solutions is known.

14. 判明している解が y_0 であるとき，変数を $y = y_0 + \frac{1}{u}$ にします.

14. When the known solution is y_0, we take the variable as $y = y_0 + \frac{1}{u}$.

15. 元の方程式は u についての 1階線形微分方程式 $u' + (2p_0(x)y_1 + p_1(x))u = -p_0(x)$ に変更されます.

15. The original equation can be changed to first order linear differential equation in u as $u' + (2p_0(x)y_1 + p_1(x))u = -p_0(x)$.

16. これも, 前述と同様に解くことができます.

16. This can also be solved as mentioned above.

17. したがって, これら3つの方程式は変数分離形や 1階線形微分方程式に帰着することができ，解くことができます.

17. In this way, these 3 equations can be solved by reduced to either separable type or first order linear differential equation.

キーワード

・同次形，・解，・ベルヌーイの方程式，・リカッチの方程

日本語解説

文１「ベルヌーイの方程式」
文１１「リカッチの方程式」

日本人以外の人の名前は、外国語の発音を日本語の読み方にしたカタカナ語で読んだり書いたりすることがあります。その際、元の外国語と発音が大きく異なるものもあるので、注意が必要です。また、日本人以外の漢字の名前の場合、外国語の発音を日本語の読み方にしたカタカナ語を使う場合と

日本語の漢字の読み方を使う場合があります。

（例）Bernoulli　ベルヌーイ
Riccati　リカッチ
Euler　オイラー
Beethoven　ベートーベン　ベートーヴェン
Einstein　アインシュタイン
金 大中　김 대중　Kim Dae-jung　キム デジュン
胡 錦涛　Hu Jintao　ホゥー チンタオ　こ きんとう

文１７「解くことができます」

「解くことができます」は「解けます」と同じ意味で、動詞（verb）の可能形（potential form）です。

動詞は活用の仕方（conjugation pattern）で大きく分けて 2 つのグループがあり、可能形もグループによって活用の仕方が違います。“来る” と “する” は例外で、どちらのグループとも違う活用の仕方です。

（例）

○グループ 1

見る	見ます	見られます	見ることができます
食べる	食べます	食べられます	食べることができます
調べる	調べます	調べられます	調べることができます

○グループ 2

話す	話します	話せます	話すことができます
書く	書きます	書けます	書くことができます
読む	読みます	読めます	読むことができます
帰る*	帰ります	帰れます	帰ることができます

○例外

来る	来ます	来られます	来ることができます
する	します	できます	することができます

*印の動詞は辞書形（dictionary form）が “～る” で終わりますがグループ 2 ですので、間違えやすいです。

8．定数係数の2階線形微分方程式の解き方

［8］ 定数係数の2階線形微分方程式の解き方

定数係数の2階線形微分方程式

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x)}$$

・ $f(x)=0$ のとき，同次方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \cdots \quad (25)$$

＜解き方＞

・式(25)の一般解を仮定

$$y = Ce^{\lambda x} \quad （C：任意定数） \quad \cdots \quad (26)$$

・式(26)を式(25)に代入

$$C(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0 \rightarrow \boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0} \quad \cdots \quad (27)$$

特性方程式

・式(27)から，

$\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ （異なる実根）のとき， $y = C_1 e^{\lambda_1 x}$ ， $C_2 e^{\lambda_2 x}$

・重ね合わせ原理より，　　（C_1, C_2：任意定数）

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}} \quad \cdots \quad (28)$$

2階線形同次方程式の一般解 → 式(25)を満たす

1. 次は，定数係数の2階線形微分方程式における同次方程式の解き方について説明します．

1. Next, we discuss second order linear differential equations with constant coefficients. I will explain how to solve its homogeneous form.

2. 定数係数の 2階線形微分方程式を，$y'' + py' + qy = f(x)$ と表します．

2. We represent the second order linear differential equations with constant coefficients as $y'' + py' + qy = f(x)$.

3. この方程式の左辺は，2階の導関数 y'' と，定数の付いた y' や y です．

3. The left-hand side of this equation is composed of the second order derivative y''; and y' and y with constant coefficients.

4. ここでは，右辺の $f(x)$ が 0 の同次方程式について考えます．

4. Here, we discuss the homogeneous equation, i.e. when $f(x)$=0.

5. 式(25)を解くために，未知である λ を用いて一般解を式(26)のように仮定します．

5. In order to solve this equation, we assume the general solution with an unknown parameter λ as shown in Fig.(26).

6. ここで，式(26)の C は任意定数です．

6. Term C in Eq.(26) is an arbitrary constant.

7. 仮定した一般解を式(25)に代入し，式を整

7. Substituting the assumed solution into

理すると，$C(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$になります.

Eq.(25), we obtain $C(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$ after rearrangement.

8. このうち，Cが0のとき，解は自明です.

8. When $C=0$, the solution is trivial.

9. また，$e^{\lambda x}$は0でないから，満たすべき式は式(27)になります.

9. Since $e^{\lambda x}$ does not become zero, Eq.(27) must be satisfied.

10. この式を特性方程式と呼びます.

10. This equation is called a characteristic equation.

11. 特性方程式を解くことで，λを求めます.

11. We can obtain λ by solving this characteristic equation.

12. ここでは，λがλ_1，λ_2の異なる実根であるときを考えます.

12. Here, we consider the case that λ has the real and distinct roots λ_1 and λ_2.

13. λ_1，λ_2を式(26)に代入すると，解が求まります.

13. Substituting λ_1 and λ_2 into Eq.(26), we can obtain the solution.

14. ここで，C_1，C_2は任意定数です.

14. Here, C_1 and C_2 are arbitrary constants.

15. 2つの解は重ね合わせの原理から式(28)のように和でまとめることができます.

15. From the principle of superposition, we can obtain the general solution as Eq.(28).

16. したがって，式(28)が定数係数の2階線形微分方程式における同次方程式の一般解になります.

16. Therefore, Eq.(28) is the general solution of the homogeneous equation derived from the second order differential equation with constant coefficients.

キーワード

・2階線形常微分方程式，・特性方程式，・重ね合わせの原理，・実根

日本語解説

文１２「実根」

「実」は real, fact, truth という意味です。「根」は root の訳語です。したがって、「実根」は real root という意味になります。

他に「実」が付く漢字に、実際（fact）、現実（real world）、真実（truth）、実数（real number）などがあります。“実は、～”のように単独で使うこともあります。これは“the fact, ～”という意味です。「実」の反対の意味の漢字に“虚”があります。これは false, lie などの意味があります。“虚”の付く漢字に、空虚（empty, vacant）、虚数（imaginary number）、虚根（imaginary root）などがあります。

9．定数係数の2階線形微分方程式の問題例

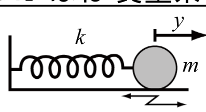
［9］ 定数係数の2階線形微分方程式の問題例

定数係数の2階線形同次方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \cdots \ (25) \quad \rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}} \quad \cdots \ (28)$$

2階線形同次方程式の一般解

［例］ばね-質量系の問題



y:変位　m:質量
k:ばね定数

$$\boxed{m\frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0} \quad \cdots \ (29)$$

・式(29)から，特性方程式は，

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{k}{m} i \quad \cdots \ (30)$$ 共役複素根

・式(30)を式(28)に代入する

$$y = C_1 e^{i\frac{k}{m}x} + C_2 e^{-i\frac{k}{m}x} \quad \cdots \ (31)$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

オイラーの公式

・オイラーの公式を用いて，式(31)を整理すると，

$$y = A\cos\frac{k}{m}x + B\sin\frac{k}{m}x \quad \cdots \ (32)$$

（A，B：任意定数）

1. 次に，練習のために，前述の2階線形の同次方程式の一般解を用いる問題を解きます．

1. Next, as an exercise, we solve a problem governed by the above mentioned second order linear differential equation.

2. 上部には先ほどの 2階線形の同次方程式とその一般解を示します．

2. In the upper part, the general solution of the second order homogeneous equation is mentioned.

3. 問題例は，ばね-質量系の問題を解くことです．

3. The problem is a spring-mass system.

4. この問題は，最初に説明した例です．

4. This is an example we mentioned at the beginning.

5. ばねの片方が固定され，もう片方に質量 m の物体が付いており，変位 y を求めます．

5. One end of the spring is fixed and a mass m is attached to the other end. We obtain the displacement y

6. 変位 y に対して，運動方程式は式(29)になります．

6. The equation of motion governing the displacement y is given by Eq.(29).

7. この微分方程式の一般解を，$y = Ce^{\lambda x}$ と仮定し，式(29)に代入します．

7. Assuming that the general solution to this differential equation in of the form $y = Ce^{\lambda x}$, we put it in Eq.(29).

8. 特性方程式を解くと，式(30)になります．

8. Solving the characteristic equation, we

obtain Eq.(30).

9. 式(30)のλは共役複素根で，式(28)に代入すると，式(31)になります．

9. The λ in Eq.(30) are the complex conjugates. Substituting them into Eq.(28), we obtain Eq.(31).

10. 式(31)の結果が表していることを理解するために，オイラーの公式を用います．

10. In order to interpret the result given by Eq.(31), we use Euler's formula.

11. この公式を用いて，任意定数をおき直すと，式(31)は式(32)に変換できます．

11. We transform the arbitrary constants using this formula. Then, Eq.(31) becomes Eq.(32).

12. 式(32)は物体の振動を表していることがわかります．

12. We see that Eq.(32) represents an oscillation of a body.

13. これで，2階線形の同次方程式の問題が解けたことになります．

13. Now, we can solve the problems on second order linear homogeneous equations.

14. 以上で，微分方程式の説明は終わりです．

14. This ends the explanation on differential equations.

キーワード

・オイラーの公式，・共役，・複素根

日本語解説

文５「片方」「もう片方」

「片」は one piece, one side, one end という意味の漢字で、「片方」は“2 つあるうちの 1 つ”や“右と左（または上と下など）のうちの一方”を表す言葉です。「もう片方の～」と言った場合、先に選ばなかった方（another / other side of the ～）という意味になります。

他に「片」の付く漢字に、「片側」「片辺」などがあります。

反対の意味の漢字は「両」で、「両方」「両側」「両辺」などの言葉があります。

文１０「オイラーの公式」

「オイラー」は人の名前で、Euler を日本語の読み方にしたものです。

「公」は public という意味です。“おおやけ”という読み方もあります。したがって、「公式」は公の式、世の中によく知られた式（formula）という意味になります。